(12.)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងខេត្តផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៩និង ទី១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០១០-២០១១ (កំពង់ធំ)

សម័យប្រឡងថ្ងៃទី ២២-០២-២០១១ 2011.3.ថ I.

វិញ្ញាសាទី១: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (រយៈពេល២ម៉ោង-ពិន្ទុ១០០)

1. គណនាផលបូក: $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\cdots+\frac{2010}{2011!}$ ។ (៥ពិន្ទុ)

2. ក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល a ; b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រូវគ្នានឹងមុំ A ; មុំ B និងមុំ C ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ: $\cot A$; $\cot B$; $\cot C$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ: $b^2=\frac{1}{2}(a^2+c^2)$ ។ (១៥ពិន្ទុ)

3. តាង Z ជាចំនួនកុំផ្លិចហើយជាឫសរបស់សមីការ $x^2-x+1=0$ ។ ចូរគណនាកន្សោម:
$S=Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6+15Z^4+6Z^2+1$ ។ (១៥ពិន្ទុ)

4. គេឱ្យខ្សែកោង (C_m) តាង $f_m(x)=\dfrac{mx^2-(m^2+m-1)x+m^2-m+2}{x-m}$ និងចំណុច $A(x_0;y_0)$ ដែល $x_0>1$ ។បង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m) ដែលកាត់តាមចំណុចA ។ (២០ពិន្ទុ)

5. គេឱ្យកន្សោម : $A=(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ ។ ចូររកតួសនិទានទាំងអស់ក្នុងពន្លាតកន្សោម A ដោយដឹងថាលេខមេគុណបីតួដំបូងនៃពន្លាតកន្សោម A នេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ (២០ពិន្ទុ)

6. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត: x_1 ; x_2 ; x_3 ; ...... ដែលកំណត់ដោយ: $x_1=a\neq-1$ និង $x_{n+1}=x_n^2+x_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$; $n\geq1$ ។ S_n តាងផលបូក និង P_n តាងផលគុណ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត: y_1 ; y_2 ; y_3 ; ...... ដែល $y_n=\frac{1}{1+x_n}$ ។
បង្ហាញថា: $aS_n+P_n=1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$; $n\geq1$ ។ (២៥ពិន្ទុ)

① គណនាផលបូក : $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{2010}{2011!}$

$= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2010!} - \frac{1}{2011!}\right)$ 4

$S = 1 - \frac{1}{2011!}$ 1

② ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b^2 = \frac{1}{2}(a^2+c^2)$

គេមាន $\cot A$; $\cot B$; $\cot C$ ជា $\frac{o}{o}$ គេបាន $\cot A + \cot C = 2\cot B$ 2

គេមាន $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow \cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$ 2

ដូចគ្នា $\cot B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\sin B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$ 2

$\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\sin C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$ 2

$\Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S} = \frac{2(a^2+c^2-b^2)}{4S}$ 2

$2b^2 = 2(a^2+c^2-b^2)$

$2b^2 = a^2+c^2$

$b^2 = \frac{1}{2}(a^2+c^2)$ 5

③ បើ z ជាឫសរបស់សមីការ: $x^2 - x + 1 = 0$

គេបាន $z^2 - z + 1 = 0$ ឬ $z^2+1 = z$ (1) 2

$(z+1)(z^2-z+1) = 0$

$z^3+1 = 0$

$z^3 = -1$ (2) 5

$S = z^{12} + 6z^{10} + 15z^8 + 20z^6 + 15z^4 + 6z^2 + 1$

$= (z^2+1)^6$

$= z^6$

$= (z^3)^2$

$= (-1)^2 = 1$ 8

④ បង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m) ដែលកាត់តាមចំណុច A

បើ $A(x_0;y_0)\in(C_m)$ នោះ $y_0=\dfrac{mx_0^2-(m^2+m-1)x_0+m^2-m+2}{x_0-m}$ 2

$$(x_0-1)m^2-(x_0^2+y_0-x_0-1)m+y_0x_0-x_0-2=0 \quad (1)$$ 5

មានខ្សែកោងពីរកាត់តាមចំណុច A កាលណា (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា

គឺ $\begin{cases} x_0-1\neq 0 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់ } \forall x>1 \\ \Delta=(x_0^2+y_0-x_0-1)^2-4(x_0-1)(y_0x_0-x_0-2)>0 \end{cases}$ 5

$\Delta=[x_0(x_0-1)-(y_0-1)]^2+8(x_0-1)>0$ ពិត $\forall x_0>1$

ពិតថាសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា

ដូចនេះ មានគ្រួសារខ្សែកោង (C_m) ពីរកាត់តាមចំណុច A 8

ឈ្មោះហត្ថលេខា

S.N

៥ គេឲ្យកន្សោម : $A=(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ ។ ចូររកតួសនិទានទាំងអស់ក្នុងពន្លាតកន្សោម A ដោយដឹងថាលេខមេគុណបីតួដំបូងនៃពន្លាតកន្សោម A នេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ (២០ពិន្ទុ)

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n$; គេបាន: 2

$$(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n = C_n^0(\sqrt{x})^n + C_n^1(\sqrt{x})^{n-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt[4]{x}} + C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2 + \dots$$

$$= C_n^0 x^{\frac{n}{2}} + C_n^1\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{n-1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{4}} + C_n^2 x^{\frac{n-2}{2}}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

$$= C_n^0 x^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}C_n^1 x^{\frac{n-1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}C_n^2 x^{\frac{n-2}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}} + \dots$$ 5

លេខមេគុណបីតួដំបូងនៃពន្លាតកន្សោម A គឺ: C_n^0 ; $\frac{1}{2}C_n^1$ និង $\frac{1}{4}C_n^2$ ។

តាមសម្មតិកម្ម C_n^0 , $\frac{1}{2}C_n^1$, $\frac{1}{4}C_n^2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត , គេបាន:

$$2\times\frac{1}{2}C_n^1 = C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^2 \iff C_n^1 = 1+\frac{1}{4}C_n^2$$

$$\iff n = 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{n(n-1)}{2} \iff 8n = 8+n^2-n \iff n^2-9n+8=0$$

$n_1=1$ មិនយក , $n_2=8$ យក ។ 5

ម្យ៉ាងទៀត: $u_k = C_8^k x^{\frac{8-k}{2}}\cdot\frac{1}{2^k}x^{-\frac{k}{4}} = \frac{1}{2^k}C_8^k\cdot x^{\frac{8-k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{4}} = \frac{1}{2^k}C_8^k x^{\frac{16-3k}{4}}$ ជាតួទី $k+1$ នៃពន្លាតកន្សោម A ។

$u_k\in\mathbb{Q} \iff \frac{16-3k}{4}\in\mathbb{Z}$ និង $0\le k\le 8$

$\iff (4-\frac{3k}{4})\in\mathbb{Z}$ និង $0\le k\le 8$

$\iff k=0$, $k=4$ និង $k=8$ 5

ដូចនេះ: ចំពោះ $n=8$, គេបាន តួទី1 , តួទី5 និង តួទី9 នៃពន្លាតកន្សោម $A=(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^8$ ជាតួសនិទាន ។ 3

6. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត: x_1 ; x_2 ; x_3 ; ...... ដែលកំណត់ដោយ: $x_1 = a \neq -1$ និង $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$: $n \geq 1$ ។ S_n តាងផលបូក និង P_n តាងផលគុណ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត: y_1 ; y_2 ; y_3 ; ...... ដែល $y_n = \frac{1}{1+x_n}$ ។

បង្ហាញថា: $aS_n + P_n = 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$: $n \geq 1$ ។ (២៥ពិន្ទុ)

ចម្លើយ

គេមាន: $y_n = \frac{1}{1+x_n} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{1+x_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}} = 1 + x_{n+1} = 1 + x_n^2 + x_n \quad (1)$ 3

$\frac{1}{y_n^2} = (1+x_n)^2 = 1 + 2x_n + x_n^2 \Rightarrow \frac{1}{y_n^2} - \frac{1}{y_n} + 1 = 1 + 2x_n + x_n^2 - 1 - x_n + 1 = 1 + x_n + x_n^2 \quad (2)$ 3

$(1) \& (2) \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n^2} - \frac{1}{y_n} + 1 \quad (3)$ ។ ពិតជាត្រូវ 3

$\varphi_n = aS_{n+1} + P_{n+1} - aS_n - P_n = a(S_{n+1} - S_n) + P_{n+1} - P_n = ay_{n+1} + P_n(y_{n+1} - 1)$

$\Rightarrow \varphi_n - ay_{n+1} = P_n(y_{n+1} - 1)$

$\Rightarrow \varphi_{n-1} - ay_n = P_{n-1}(y_n - 1)$

$\Rightarrow \frac{\varphi_n - ay_{n+1}}{\varphi_{n-1} - ay_n} = \frac{y_n(y_{n+1} - 1)}{y_n - 1} \quad (4)$ 3

តាម(3):

$\frac{1}{y_{n+1}} - 1 = \frac{1}{y_n^2} - \frac{1}{y_n} \Rightarrow \frac{1 - y_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{1 - y_n}{y_n^2} \Rightarrow \frac{y_{n+1} - 1}{y_n - 1} = \frac{y_{n+1}}{y_n^2}$

$\Rightarrow \frac{y_n(y_{n+1} - 1)}{y_n - 1} = \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad (5)$ ។ 3

តាម(4)&(5): $\frac{\varphi_n - ay_{n+1}}{\varphi_{n-1} - ay_n} = \frac{y_{n+1}}{y_n} \Rightarrow y_n \varphi_n = y_{n+1} \varphi_{n-1} \quad (6)$ 3

តាមរយៈ: $\varphi_n = ay_{n+1} + P_n(y_{n+1} - 1) \Rightarrow \varphi_1 = ay_2 + P_1(y_2 - 1)$

$\varphi_1 = \frac{a}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+a}\left(\frac{a}{1+a+a^2} - 1\right)$ ដោយ: $P_1 = \frac{1}{1+a}$; $y_2 = \frac{1}{1+x_2} = \frac{1}{1+x_1+x_1^2} = \frac{1}{1+a+a^2}$

$= 0$

តាម(6), គេបាន $\varphi_n = 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$, $n \geq 1$ ព្រោះ: $y_n \neq 0$ គ្រប់ $n \in IN$ និង $n \geq 1$ ។ 3

5

បើ $\varphi_1 = 0 \Rightarrow aS_2 + P_2 = aS_1 + P_1$

$\varphi_2 = 0 \Rightarrow aS_3 + P_3 = aS_2 + P_2 = aS_1 + P_1$

$\vdots$

$\varphi_n = 0 \Rightarrow aS_{n+1} + P_{n+1} = aS_n + P_n = \dots = aS_1 + P_1$

$\vdots$

ដោយ: $aS_1 + P_1 = \frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+a} = 1$

ដូចនេះ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, គេបាន: $aS_n + P_n = 1$

4

6.